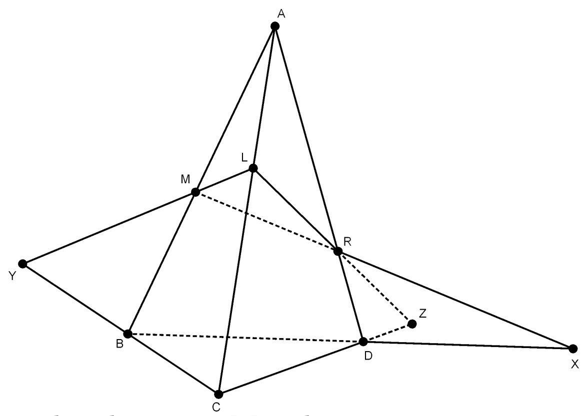
Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 26.09.2014.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(40%)(a) Neka je ABCD dati tetraedat i neka su M, L i R redom tri tačke na ivicama AB, AC i AD, takve da $pp[B,D) \cap pp[M,R) = \{X\}$, $pp[C,B) \cap pp[L,M) = \{Y\}$ i $pp[C,D) \cap pp[L,R) = \{Z\}$ (vidi sliku desno). Pokazati da tačke X, Y i Z prpadaju istoj pravoj.



(Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite Menelajevu teoremu: Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Tada tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$).

(60%)(a) Neka su MA, MB i MC tri ivice kocke koje imaju zajednički vrh M. Ako sa a označimo dužinu stranice kocke, izračunati površinu trougla $\triangle ABC$ i pokazati da dužina okomice iz tačke M na ravan ABC iznosi $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak br. 2

(35%)(a) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu za dva data kruga.

(65%)(b) Dat je $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD + EB = DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

U oba zadatka detaljno sprovesti sve četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju.

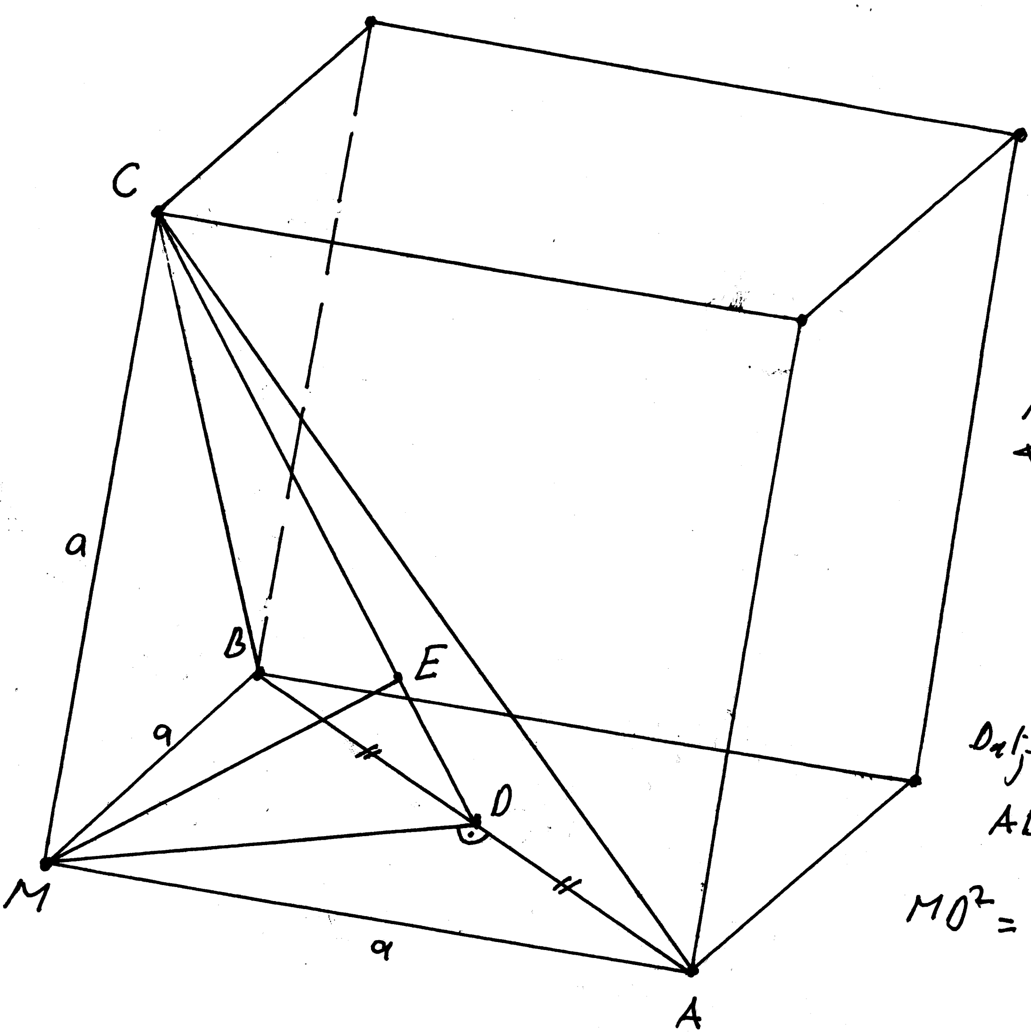
Zadatak br. 3

(40%)(a) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

(60%)(b) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i data je prava t. Konstrisati krug k koji dodiruje datu pravu i dva data kruga. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(#) Neka su MA, MB i MC tri ivice kocke koje imaju zajednički vrh M. Ako sa a označimo dužinu stranice kocke izračunati površinu ΔABC i pokazati da dužina okomice iz tačke M na ravan ABC iznosi $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Rj.



Nacrtajmo sliku.
Neka je $D \in AB$ t.d. $MD \perp AB$.

Prvo pokažimo da je $AD \cong BD$.

$$\left.\begin{array}{l} MD \cong MD \\ MA \cong MB \\ \measuredangle ADM \cong \measuredangle BDM = 90^\circ \end{array}\right\} \overset{SSU}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MDA \cong \Delta MDB$

$\Downarrow$

$AD \cong BD$. $\quad\ldots(*)$

Dalje

$AB^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

$MD^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow MD = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Kako je $AC \cong CB \; (= a\sqrt{2}) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \Delta ABC$ jkk sa visinom CD

A kako je $CM \perp MD$ to CD možemo izračunati

$$CD^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow CD = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

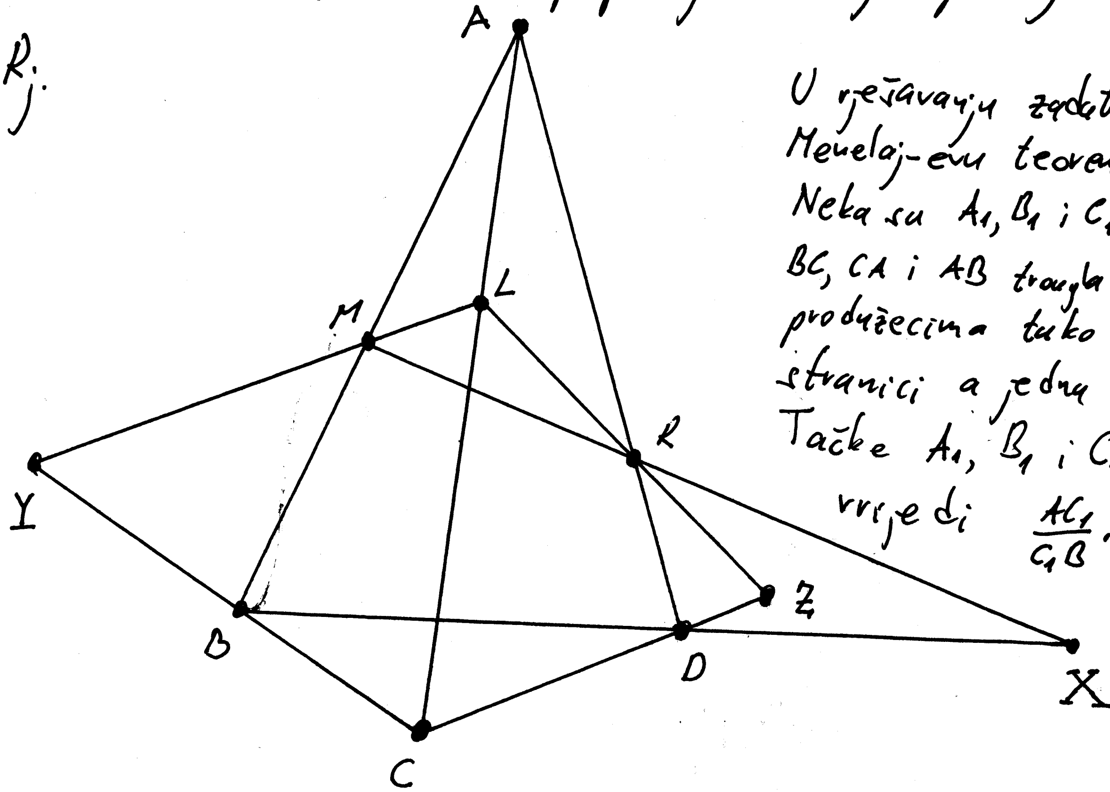
$$\Rightarrow P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Označimo sa ME visinu tetraedra $MABC$ iz tačke M na stranu ABC.
Znamo $V_{tetraedra\, MABC} = \frac{1}{3} ME \cdot P_{\Delta ABC}$. Dalje kako je i $V_{tetra.\, MABC} = \frac{1}{3} CM \cdot P_{\Delta AMB}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} ME \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ME = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

(#) Neka je $ABCD$ dati tetraedar i neka su M, L i R redom tri tačke na ivicama AB, AC i AD, takve da $pp[B,D)\cap pp[M,R)=\{X\}$, $pp[C,B)\cap pp[L,M)=\{Y\}$ i $pp[C,D)\cap pp[L,R)=\{Z\}$. Pokazati da tačke X, Y i Z pripadaju istoj pravoj.

Rj.



U rješavanju zadatka ćemo iskoristiti Menelaj-evu teoremu:
Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla ΔABC ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku.
Tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne akko vrijedi $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Posmatrajmo ΔABD i pravu $p(M,R)$ $\xRightarrow{\text{Menel. teor.}}$ $\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$ ...(1)

Posmatrajmo ΔABC i pravu $p(M,L)$ $\xRightarrow{\text{Menel. teor.}}$ $\frac{MB}{AM}\cdot\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CY}{YB}=1$ ...(2)

Posmatrajmo ΔACD i pravu $p(L,R)$ $\xRightarrow{\text{Menel. teor.}}$ $\frac{LC}{AL}\cdot\frac{AR}{RD}\cdot\frac{DZ}{ZC}=1$ ...(3)

Kada (1), (2) i (3) pomnožimo dobićemo

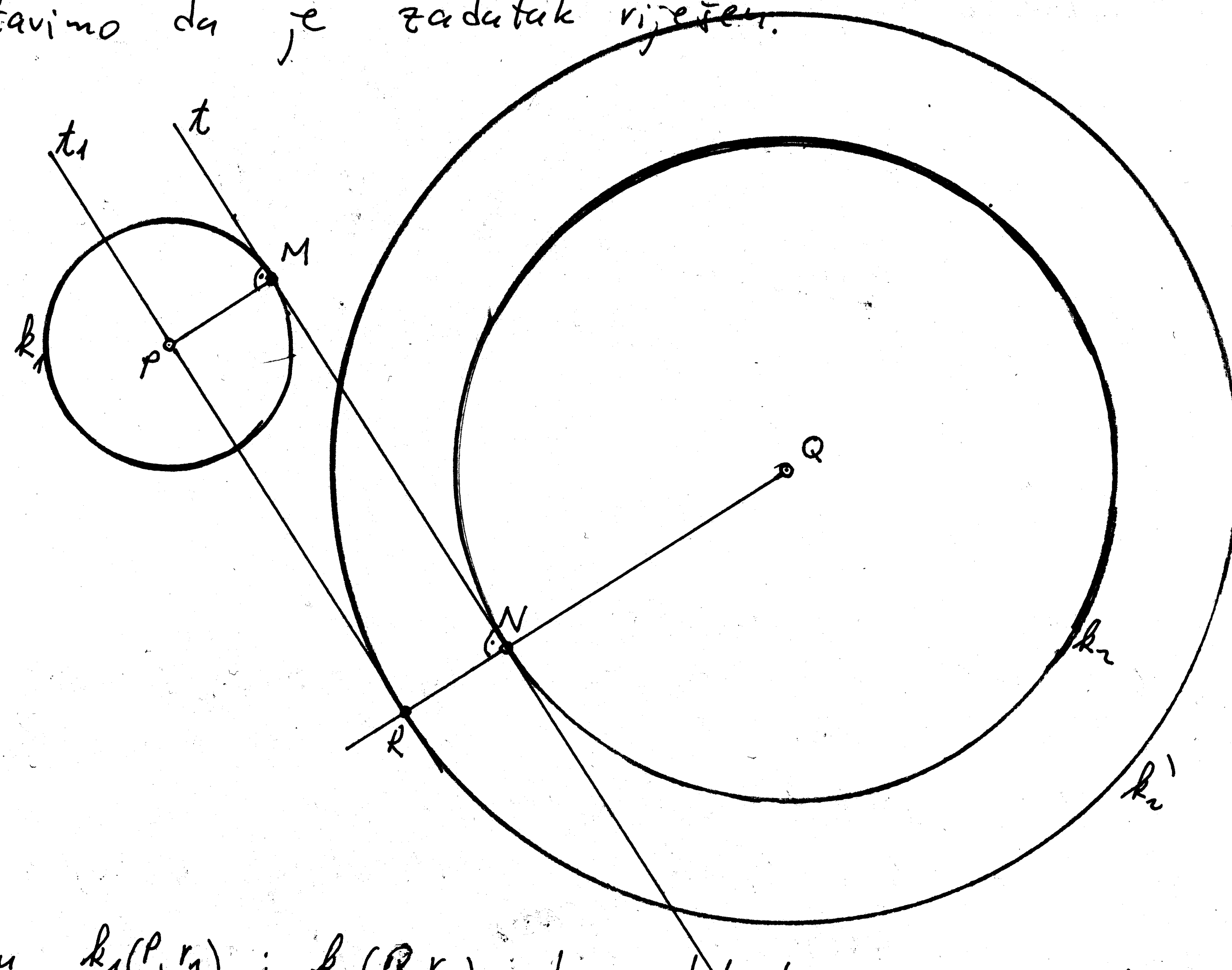
$\frac{BX}{XD}\cdot\frac{CY}{YB}\cdot\frac{DZ}{ZC}=1$ $\xRightarrow[\text{i pravu}]{\text{ako posmatramo } \Delta YCZ}$ $p(B,D)$ prema Menelajevoj teoremi X, Y i Z su kolinearne

q.e.d.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

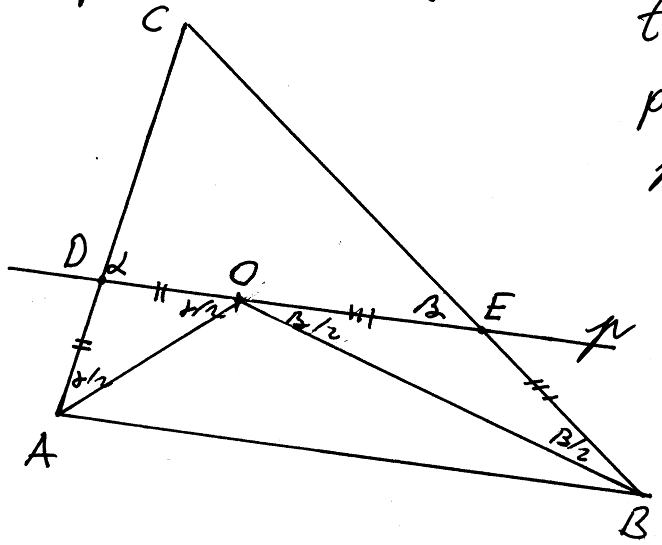
Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Dat je ΔABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Rj.:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati



trougao, i neka je p tražena prava takva da $E \in p$, $p \parallel AB$, $p \cap AC = \{D\}$, $p \cap \{B,C\} = \{E\}$ i

$AD + BE = DE$.

Na duži DE izaberimo tačku O takvu da $AD \cong DO$. i

Kako je $AD+BE=DE$ to je $OE \cong BE$.

$p \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDC = \alpha$.

$p \parallel AB$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEC = \beta$.

$\measuredangle EDC = \alpha$ je vanjski ugao jednakokrakog $\Delta AOD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle AOD \cong \measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $\measuredangle DEC = \beta$ je vanjski ugao jkk $\Delta OBE \Rightarrow$

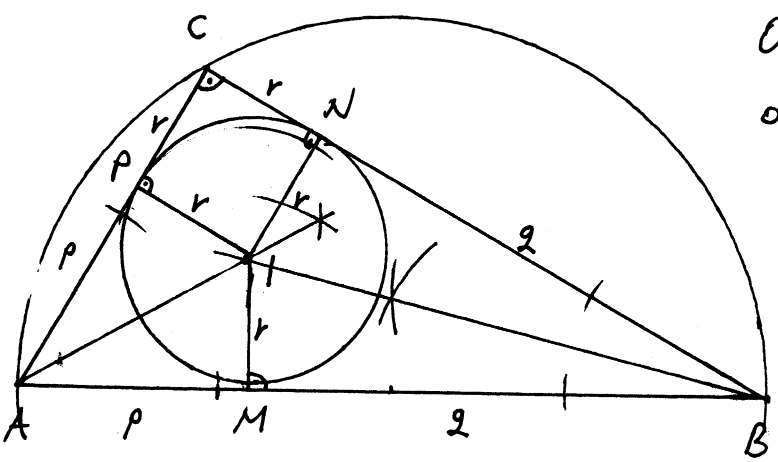
$\Rightarrow \measuredangle OBE \cong \measuredangle BOE = \frac{\beta}{2}$.

$$\measuredangle OAB = \alpha/2 \quad i \quad \measuredangle OBA = \beta/2$$

Kako je dat ΔABC to su dati i uglovi α i β pa tačku O nije teško konstruisati. Kako $O \in p$ i $p \parallel AB$ to nije teško konstruisati i pravu p.

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je
$IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad | : 2$$

$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.